MUSIKALISCHE AKUSTIK 2
Von der Unmöglichkeit einer vollkommenen Stimmung

In diesem Handout werden verschiedene Aspekte von Stimmungssystemen thematisiert und die Unmöglichkeit einer «vollkommenen Stimmung» dargelegt.

Sie erarbeiten sich dieses Thema anhand des Texts sowie der verlinkten Podcasts, Videos und Features im Selbststudium.

Die Ausführungen beinhalten auch Ihnen geläufige mathematische Kompetenzen (Bruchrechnen und Logarithmus).

Alle im Text unterstrichenen Passagen sowie die Playbuttons sind direkt verlinkt. Auch diese Inhalte gehören zur Bearbeitung des Skripts dazu.

Michael Schraner | 20.5.2020

MUSIKALISCHE AKUSTIK 2

Von der Unmöglichkeit einer vollkommenden Stimmung

Unsere modernen Tasteninstrumente sowie auch Computer sind im Allgemeinen so gestimmt, dass alle Halbtöne gleich gross sind. Diese Stimmung nennt man etwas ungenau gleichschwebende Temperatur, da Intervalle gleicher Proportion in unterschiedlichen Frequenzbereichen eigentlich unterschiedlich schweben. Korrekt ist deshalb der Terminus gleichstufige Temperatur. Diese hat den Vorteil, dass ein bestimmtes Intervall (resp. ein Akkord) immer genau gleich tönt, unabhängig davon, von welchem Ton man ausgeht. Dafür tönt ausser der Oktave kein Intervall wirklich rein (also: schwebungsfrei).

> GLEICHSTUFIGE TEMPERATUR

>> TEMPERATUR UND STIMMUNG

>> TONARTEN-CHARAKTERISTIK

> TASTEN ALS TONVORRAT

Ursache dafür ist der eingeschränkte Tonvorrat von Tasten- und Bundinstrumenten. Klavierspieler*innen stehen pro Oktave nur 12 Töne zur Verfügung, welche fest gestimmt sind. Hingegen können Sänger*innen problemlos so intonieren, dass durch (stufenloses) Anheben oder Absinken die Tonhöhe eines jeden Tones nach Bedarf modelliert (also: intoniert) werden kann.

Im Laufe der Geschichte haben sich verschiedene Stimmungen resp. Temperaturen entwickelt, abhängig von den jeweiligen Erfordernissen. **Die Stimmungen haben sich im Laufe der Jahrhunderte nicht prinzipiell verbessert, sie haben sich bloss verändert** – angepasst der jeweiligen Musiksprache. Es macht deshalb durchaus auch heute Sinn, z.B. eine Orgel oder ein Cembalo anders als gleichstufig zu stimmen, will man die Musik einer bestimmten Epoche adäquat wiedergeben.

Unter Stimmung versteht man die Fixierung von Tönen eines Musikinstrumentes (in der Regel nach einem vorgegebenen System), unter Temperatur die gezielte Veränderung einiger Intervalle zugunsten verbesserter Klangqualität anderer Intervalle. Diese Unterscheidung wirkt heute etwas künstlich.

Gekoppelt an Stimmungssysteme sind auch Tonartencharakteristika. Konsultiert man die wichtigsten Musiktheoretiker vom 16. bis ins 19. Jahrhundert, finden sich immer wieder Versuche, einzelnen Tonarten spezifische Affekte zuzuschreiben. Die Ausführungen reichen von ausführlichen und teils widersprüchlichen bis zu etwas pauschalen Aussagen, so notiert z.B. Mitzler (Leipzig 1736-38) «… daß alle Dur=Thone munter scharff und lustig, hingegen alle Moll=Thone, sittsam angenehm und traurig klingen, welches die Erfahrung beweiset.»

Bevor Sie weiterlesen, hören Sie sich den untenstehenden Ausschnitt aus einem Orgelstück in fünf verschiedenen Temperaturen an:

> TEMPERATUREN IM VERGLEICH:

1. GLEICHSTUFIG TEMPERIERT

PRO HALBTON 100 CENT

2. KIRNBERGER

SCHWEBUNGSFREIE TERZEN UND QUINTEN IN DEN GÄNGIGSTEN TONARTEN

3. WERCKMEISTER

«WOHLTEMPERIERT» DURCH ALLE TONARTEN

4. MITTELTÖNIG

SCHWEBUNGSFREIE TERZEN

5. PYTHAGOREISCH

SCHWEBUNGSFREIE QUINTEN

Beginn des Orgelstücks **Kleines harmonisches Labyrinth** (BWV 591): Die Autorenschaft J. S. Bachs wird angezweifelt, das Stück stammt wahrscheinlich von J. D. Heinichen. Durch die zunehmende Chromatisierung ab Takt 7 lassen sich an diesem kurzen Ausschnitt die klanglichen Unterschiede verschiedener Temperaturen eindrücklich demonstrieren, am äuffälligsten in den Varianten 4 (mitteltönig) und 5 (pythagoreisch).

Zur Veranschaulichung: Cent-Skala

Cent (abgekürzt C) ist ein für unsere anschauliche Vorstellung von der Addition und Teilung der Intervalle nachgebildetes Distanzmass für Intervalle. Der Wert 1200 Cent für die Oktave ist nicht nur der gleichstufig (gleichschwebend) temperierten Tonskala optimal angepasst, sondern berücksichtigt auch die Unterscheidungsfähigkeit des Gehörs für Tonhöhen. Der gerade noch gehörsmässige merkliche Unterschied beträgt 3 bis 5 Cent.

Bei der Gleichteilung der Oktave (Frequenzverhältnis 2:1) in 12 gleich grosse Tonschritte ($\sqrt[12]{1/2}$) erhält jeder der so entstehenden Halbtöne die Masszahl 100 Cent (lat. centum, Hundert). Dies entspricht den Halbtonschritten der gleichstufig temperierten Stimmung (Klavier). Für die anderen Intervalle ergibt sich dann die Cent-Zahl aus der Anzahl der in ihnen liegenden Halbtöne, die mit 100 zu multiplizieren sind. Folglich ist z.B. die grosse Terz mit 4 Halbtonschritten 400C gross, die Quinte mit 7 Halbtonschritten 700C etc. Diese als Beispiel erwähnte Terz und Quinte nennt man «gleichschwebend temperierte» Terz resp. Quinte, obwohl deren Schwebungen je nach Tonlage unterschiedlich schnell pulsieren.

Repetition: Schwebung

Der für die Bestimmung eines Intervalls entscheidende physikalische Parameter ist das Verhältnis der Schwingungszahlen (Frequenzen) der beiden Töne. Wie bereits bekannt, verhalten sich Saitenteilungs- und Frequenzverhältnis umgekehrt proportional zueinander. Beides lässt sich aus der Naturtonreihe ablesen. So wurden Intervalle durch Längenverhältnisse definiert, bevor Schwingungszahlen gemessen werden konnten – denn bei ein und demselben Intervall bleiben sie konstant, unabhängig von Tonlage und Klangfarbe.

Repetition: Saitenteilung und Frequenz anhand der Natur- resp. Teiltonreihe am Monochord

Diese seit den Pythagoräern bekannte Tatsache hat für die Berechnung von Intervallen zur Folge, dass bei der **Zusammensetzung aufeinanderfolgender Intervalle die Verhältnisse zu multiplizieren und beim Abziehen zweier Intervalle voneinander diese zu dividieren sind**. Zwar entspricht diese Vorgehensweise nicht unserer Anschauung, hängt aber zusammen mit der Anordnung der Rezeptoren auf der Basilarmembran des Innenohres, auf der die einzelnen Oktaven etwa den gleichen Platz einnehmen. Die Frequenzzahl steigt zwar exponentiell an, entspricht aber gehörsmässig einem Fortschreiten in gleich grossen Intervallschritten.

Durch Logarithmierung der Verhältnisse erhält man Distanzmasse für die Intervalle, die addiert und subtrahiert werden dürfen.

Die Definition eines Intervalls in Cents lautet:

$$\frac{1200 \cdot \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\log 2}$$

LOGARITHMUS: FORMEL <

Die Division durch den Logarithmus von 2 dient der Normierung zum Oktavmass.

Für die schwebungsfreie Quinte (Frequenzverhältnis 3:2) erhält man in Cents demzufolge:

$$\frac{1200 \cdot \log(3/2)}{\log 2} = 701{,}955C$$

Für die schwebungsfreie Quarte (Frequenzverhältnis 4:3) ergibt sich entsprechend:

$$\frac{1200 \cdot \log(4/3)}{\log 2} = 498{,}045C$$

CENT-SKALA <<

Quinte und Quarte sind Komplementärintervalle. Ihre Addition muss demnach eine Oktave ergeben, also (1199,99999 resp.) 1200C.

GLEICHSTUFIG TEMPERIERTER HALBTONSCHRITT = 100 CENT <<

Pietro Mengoli (1670) dürfte der erste gewesen sein, der die einzigartige Möglichkeit dieses neuen mathematischen Werkzeugs zur Grössendarstellung von Intervallen erkannt und angewandt hat. Der von ihm vorgelegte Vorschlag zu einer Einteilung der Oktave in 12 gleiche Abschnitte mit jeweils bestimmten Toleranzbreiten ist schon sehr fortschrittlich, auch wenn er noch auf Zehnerlogarithmen basiert. Leonhard Euler (1739) führte dann die später als Oktavmass bezeichneten Logarithmen auf der Basis 2 ein, auf denen die weitere Entwicklung zum Cent aufbauen konnte. Nach diversen Vorarbeiten anderer, veröffentlichte A. J. Ellis die Masseinheit Cent 1885 ersmals in einem Artikel.

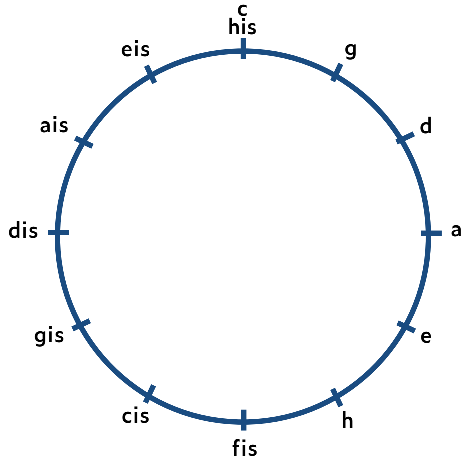
1. Pythagoreisches oder Quintkomma

Schichtet man 12 reine Quinten aufeinander und vergleicht den Endton his mit seiner enharmonischen Verwechslung c, die sich aus der Schichtung von 7 reinen Oktaven ergibt, stellt man einen (hörbaren) Unterschied von 23.5 Cent fest. Diese Abweichung heisst Quint- oder auch pythaghoräisches Komma.

Die zwölffache Quintschichtung zweifach veranschaulicht:

1. Im Quintenzirkel (konsequent mit reinen-Quinten aufwärts im Uhrzeigersinn):

«ZUSAMMENZÄHLEN» HEISST MULTIPLIZIEREN, «ABZIEHEN» HEISST DIVIDIEREN <<



QUINTEN KONSEQUENT GESCHICHTET <

>> SYNTONISCHES KOMMA

2. Im Notenbild (zwecks Übersichtlichkeit mit jeweils einer Quinte auf- und einer Quarte abwärts notiert):

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Das Quintkomma berechnet sich folgendermassen in Brüchen:

> DAS QUINTKOMMA IN BRÜCHEN GERECHNET

$$\mathbf{(3/2)^{12} : (2/1)^{7}}$$

«12 schwebungsfreie Quinten (3/2)
minus 7 schwebungsfreie Oktaven (2/1)»

> UMRECHNEN IN CENT

In der Logarithmus-Formel für die Umrechung in Cent wird für den Wert f_2 die ganze Operation $(3/2)^{12}$ eingesetzt, für f_1 entsprechend $(2/1)^{7}$. Als Resultat erhält man den Wert 23.5C. Somit ist his um 23.5C höher als c. Werden die Werte von f_2 und f_1 vertauscht, erhält man -23.5C als Resultat, was soviel bedeutet wie: c ist um 23.5C tiefer als his. Das Resultat muss also richtig interpetiert werden.

> DER QUINTENZIRKEL SCHLIESST SICH NICHT!

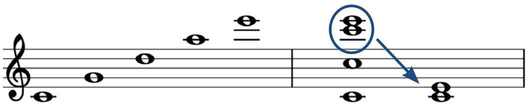
Das Quintkomman entspricht etwa 1/8 Klavierton und ist somit (<u>insb. beim Zusammenklang von his und c als Schwebung</u>) hörbar. Dieses Komma verdeutlicht die Tatsache, dass sich der Kreis resp. der Quintenzirkel bei Verwendung schwebungsfreier Quinten nicht schliesst. Bei der Stimmung eines Tasteninstrumentes kann aber keinesfalls auf schwebungsfreie reine Oktaven verzichtet werden!

Repetition: <u>Reine Stimmung</u> und die hörbaren Unterschiede zwischen <u>reiner</u> und <u>gleichstufig temperierter Stimmung</u>.

Nebst der Oktave ist seit dem 16. Jahrhundert der das Bestreben gross, reine (also: schwebungsfreie) grosse Terz zu haben:

2. Syntonischs Komma / Terzkomma

Wenn man von c ausgehend 4 schwebungsfreie Quinten (3/2) einstimmt und danach das erreichte e um 2 Oktaven (2/1) nach unten transponiert, erhält man eine Terz, die grösser ist als die schwebungsfreie grosse Terz (5/4):



$$\mathbf{(3/2)^{4} : (2/1)^{2} = 81/64}$$

«4 schwebungsfreie Quinten (3/2)
minus 2 schwebungsfreie Oktaven (2/1)»

Verglichen mit der schwebungsfreien grossen Terz (5/4) ergibt sich folgende Abweichung:

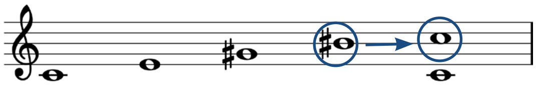
$$81/64 : 5/4 = 324/320 = \mathbf{81/80}$$

Diese Abweichung entspricht 21.5C. Eine grosse Terz als Ergebnis von «4 Quinten minus 2 Oktaven» ist also um 21.5C grösser als die schwebungsfreie grosse Terz aus der Naturtonreihe. Diesen Unterschied nennt man <u>Terzkomma oder syntonisches Komma</u>.

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass es schwebungsfreie grosse Terzen und schwebingsfreie Quinten unter Einhaltung schwebungsfreier Oktaven nicht gibt!

3. Kleine und grosse Diesis

Versuchen wir es anders herum – also unter Auslassung der Quinten: Ausgehend von c werden 3 schwebungsfreie grosse Terzen (5/4) geschichtet und der Schlusston his mit einem c in der Oktave verglichen:



$$\mathbf{(5/4)^{3} : (2/1) = 125/128}$$

«3 schwebungsfreie grosse Terzen (5/4)
minus schwebungsfreie Oktave (2/1»

Die durch Aufeinanderschichtung dreier grosser Terzen erreichte Oktave ist um 41.1 Cent kleiner als die schwebungsfreie Oktave. Dieser Unterschied wird <u>kleine Diësis</u> genannt. Wie bereits weiter oben erwähnt, ist aber ein Verzicht auf schwebungsfreie Oktaven nicht denkbar.

Werden von c ausgehend nacheinander 4 schwebungsfreie kleine Terzen eingestimmt, so bildet der Endton deses mit dem Anfangston c eine Oktave, die grösser als das schwebungsfreie Intervall ist:

$$\mathbf{(6/5)^{4} : (2/1) = 648/625}$$

«4 schwebungsfreie kleine Terzen (6/5)
minus schwebungsfreie Oktave (2/1)»

Diese Differenz von 62,6 Cent heisst <u>grosse Diësis</u>.

Fazit

Im Mittelalter war die reine Quinte nebst der Oktave das Mass der Dinge. Mit zunehmender Vorliebe für Terzen in der abendländischen Musik wurde es notwendig, Kompromisse zu finden wie z.B. die mitteltönige Stimmung, wo das syntonische Komma regelmässig verteilt wurde, daraus aber eine «<u>Wolfsquinte</u>» resultierte. Diese verschob man in einen Bereich, der tonartlich nicht zu sehr ins Gewicht fiel. Mit dem zunehmenden Anspruch, alle Tonarten nutzen zu können, wurde eine «wohltemperierte Stimmung» entwickelt – die musikgeschichtlich in Johann Sebastian Bachs Werk «<u>Das wohltemperierte Clavier</u>» (Band 1 erschien 1722, Band 2 1740/41) verewigt wurde. Die Errungenschaft einer Temperatur, die alle Tonarten ermöglicht führte dafür zum Verlust «individueller Farben» (griech. chrom, Farbe) einzelner Intervalle resp. Tonarten.